Урок геометрии

Тема урока «Метод вспомогательной окружности»

Урок геометрии проводится в 11 классе, в конце учебного года, при организации повторения и подготовке к ЕГЭ. Урок рассчитан на учеников изучающих математику на профильном уровне.

Урок является частью реализации проекта, подготовленного учениками 8-го специализированного инженерного класса Борозенцом Владимиром, Койновой Елизаветой под руководством учителя математики Иванчикова Николая Леонидовича. Урок проводят авторы проекта, ученики 8 специализированного класса IT – направления.

Актуальность рассмотрения этой темы на уроке геометрии обусловлена следующей ситуацией.

В школьных учебниках по геометрии есть тема, которая называется «Центральные и вписанные углы». В ходе этой темы учащихся знакомят с понятием «вписанный угол» и с теоремой о вписанном угле. С этой темой связан метод вспомогательной окружности, который по какой-то причине не описан и не объяснен ни в одном из современных учебников по геометрии. Сложные задачи по геометрии, которые на самом деле легко решаются этим методом, встречаются на экзаменах ОГЭ и ЕГЭ, а также на олимпиадах по математике, поэтому учащимся просто необходимо владеть этим методом.

Тип урока – урок обобщения и систематизации знаний.

Цель урока: Научить решать задачи с помощью метода вспомогательной окружности.

Задачи:

- Напомнить теорию по теме центральные и вписанные углы

- Показать как эта теория используется при решении задач методом вспомогательной окружности
- Формировать навыки решения задач методом вспомогательной окружности

Оборудование: 5-7 учебных мест, оборудованных компьютерами, проектор, экран.

План урока.

I. Постановка цели урока.
   - Проблемная задача

II. Знакомство с методом решения задач.
   - Повторение теории
   - Совместный поиск пути решения
   - Реализация метода

III. Отработка навыков решения задач.
   - Ученики пробуют свои силы в решении задач по этой тематике, в случае необходимости получая помощь.
   - Выполнение дифференцированных заданий.

IV. Итог урока. Домашнее задание.

Содержание урока.

I. Постановка цели урока.

- **Проблемная задача**

В прямоугольном треугольнике АВС из точки М стороны АС проведён перпендикуляр МН к гипотенузе АВ. Докажите, что углы МНС и МВС равны.

II. Знакомство с методом решения задач.

- **Повторение теории**

В некоторых задачах для доказательства равенства углов можно воспользоваться вспомогательной окружностью, описав ее около треугольника или четырехугольника.

Напомним, что:

- Около любого треугольника можно описать окружность.
- Описать окружность можно только около выпуклых четырехугольников, у которых сумма противоположных углов равна 180о.
- Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

- **Совместный поиск пути решения**
- **Реализация метода**

Указания:

Можно ли описать окружность вокруг четырехугольника CMHB?

Что вы можете сказать про нужные нам углы MHC и MBC?

Решение: Около четырехугольника CMHB можно описать окружность, так как треугольник ABC прямоугольный и угол ACB равен 90˚, поскольку MH – перпендикуляр, то угол MHB равен 90˚.

Теперь углы MHC и MBC являются вписанными и оба опираются на одну дугу. Тогда мы можем сделать вывод, что углы MHC и MBC равны.

III. Отработка навыков решения задач.

- Ученики пробуют свои силы в решении задач по этой тематике, в случае необходимости получая помощь.
- Выполнение дифференцированных заданий.

Первый уровень сложности

1. В четырёхугольнике ABCD углы B и D прямые. Диагональ AC образует со стороной AB острый угол 40◦, а со стороной AD— угол 30◦. Найдите острый угол между диагоналями AC и BD.

Указание. Опишите окружность около четырехугольника ABCD, доказав, что это возможно.

Ответ. 80°.

Решение. Опишем окружность около четырехугольника ABCD. Это можно сделать, так как $\angle B = \angle D = 90^\circ$. $\angle CAD = \angle DBC = 30^\circ$, так как эти два угла являются вписанными и опираются на одну дугу CD. Если $\angle B = 90^\circ$, а $\angle DBC = 30^\circ$, то $\angle ABD = 60^\circ$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle AOB$ (O – точка пересечения диагоналей AC и BD) $= 80^\circ$. $\angle BOC$, который тоже образуется при пересечении диагоналей AC и BD равен 100°, но нам нужно найти острый угол, который равен 80°.

2.На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от ее середины. Из нее на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры. Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров является трапецией.

Указание. Проведите две окружности через противоположные вершины параллелограмма и точку, взятую на диагонали.

Решение. Рассмотрим параллелограмм ABCD с диагональю AC и произвольно взятой на ней точкой O (O не является серединой AC). Из точки O опустим перпендикуляры OK, OK_1, OH, OH_1 на стороны BC, AD, AB и CD соответственно. Докажем, что четырехугольник HKH_1K_1 – трапеция. Опишем окружности около четырехугольников $AHOK_1$ и H_1OKC. Это можно сделать, так как OK, OK_1, OH, OH_1– перпендикуляры. Теперь углы OCH_1 и OKH_1 являются вписанными и опираются на одну дугу. Между собой эти углы равны. Углы HK_1O и HAO также являются вписанными и опираются на одну дугу и между собой они также равны. Углы HK_1K и K_1KH_1 равны, так как угол OCH_1 равен углу HAO (поскольку ABCD – параллелограмм), а так как угол OCH_1 равен углу OKH_1 и угол HAO равен углу HK_1O, $\Rightarrow$ угол OKH_1 равен углу HK_1O. Углы HK_1K и K_1KH_1, образованные при пересечении двух прямых KH_1 и HK_1 секущей KK_1 равны. Отсюда сделаем вывод, что четырехугольник HKH_1K_1 является трапецией. Что и требовалось доказать.

Второй уровень сложности

1.Пусть биссектрисы AA_1 и BB_1 углов BAC и CBA треугольника ABC пересекаются в точке H, и величина угла ACB равна 60 градусов. Доказать, что треугольник A_1B_1H – равнобедренный.

Указание. Опишите окружность вокруг четырехугольника A_1HB_1C и проведите биссектрису угла C.

Решение. Для того, чтобы доказать, что треугольник A_1B_1H – равнобедренный достаточно доказать, что $\angle HA_1B_1 = \angle HB_1A_1$. Проведем биссектрису угла C. Она пройдет через точку H, потому что все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Если угол $C = 60^\circ$, то на углы A и B приходится 120°. Так как AA_1 и BB_1 – биссектрисы, то на углы ABB_1 и BAC приходится 60°. Значит, угол $AHB = 120^\circ$, тогда и угол A_1HB_1 равен 120°. Следовательно, около четырехугольника A_1HB_1C можно описать окружность. Углы HCB_1 и HA_1B_1 опираются на одну дугу B_1H и являются равными. Углы HCA_1 и HB_1A_1 опираются на одну дугу A_1H и равны между собой. CC_1 – биссектриса, поэтому углы HCA_1и HCB_1 равны. Тогда $\angle HCA_1 = \angle HCB_1 = \angle HA_1B_1 = \angle HB_1A_1$. Ну и тогда $\angle HA_1B_1 = \angle HB_1A_1$. Следовательно, треугольник A_1B_1H является равнобедренным. Что и требовалось доказать.

Та часть учеников, которая не может справиться с решением задач даже с помощью консультантов выполняет тестовые задания по теме вписанные и центральные углы.

IV. Итог урока. Домашнее задание.

Итогом урока является обсуждение с учащимися достоинств и недостатков изученного метода.

Каждый учащийся получает буклет, в котором представлена суть метода, тест и задачи, которые можно решить методом вспомогательной окружности.

К задачам даны указания и ответы.

Домашнее задание предлагается 2-х уровней сложности.